

20ός αιώνας: Σχέσεις λογικής, φιλοσοφίας και επιστημών

Διονύσιος Αναπολιάνος

*Πρόεδρος Τμήματος Μεθοδολογίας, Ιστορίας
& Θεωρίας της Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αθηνών*

Ευχαριστώ για την πρόσκληση να είμαι μέλος αυτού του στρογγυλού τραπέζιου. Είχα φανταστεί ότι μάλλον εγώ θα αναλάμβανα τον άχαρο ρόλο να μιλήσω για θέματα σχετικά με τη φιλοσοφία των Μαθηματικών.

Κατά κάποιον τρόπο υπήρξε μια πρώτη εισήγηση του κ. Μπαλτά προς αυτή την κατεύθυνση. Οφείλω να πω όμως εξ αρχής ότι δεν συμφωνώ με τη διαπίστωση ότι είναι καντιανές οι ρίζες των τριών βασικών φιλοσοφικών συστημάτων που σχετίζονται με τη φιλοσοφία των Μαθηματικών.

Αληθεύει ότι είναι καντιανές οι ρίζες του ιντουσιονισμού, των άλλων δύο είναι αμφίβολο. Οι ρίζες του Λογικισμού, για παράδειγμα, ανάγονται στον Λάιμπνιτς κι όχι στον Καντ. Εν πάση περιπτώσει, δεν είναι αυτό το θέμα. Εκείνο που έχει σημασία είναι να ειπωθούν ορισμένα στοιχεία σχετικά με τη Φιλοσοφία, τη Λογική και τα Μαθηματικά.

Θα μπορούσα να σας μιλήσω και για τη Φυσική ίσως, αλλά υπάρχουν εδώ αρκετοί εκπρόσωποί της. Θα ξεκινήσω λέγοντας πως το βασικό μοτίβο που χαρακτηρίζει την περιπέτεια της Λογικής και των Μαθηματικών στον 20ό αιώνα είναι το

μοτίβο της σύγκρουσης, της σύγκρισης, του παντρέματος και ίσως της αντιδιαστολής δύο βασικών εννοιών που υπάρχουν στα μαθηματικά: της έννοιας της απόδειξης και της έννοιας της αλήθειας.

Αν κάποιος θέλει να μιλήσει για τα εννοιολογικά επιτεύγματα του 20ού αιώνα, θα πρέπει κατά βάση να επικεντρωθεί σ' αυτό το δίπολο. Τα Μαθηματικά εν γένει είναι μια δραστηριότητα που ανά τους αιώνες εξαντλείται στην αναζήτηση των σχέσεων μεταξύ των πόλων δύο συγκεκριμένων δίπολων.

Τα δίπολα αυτά είναι τα πεπερασμένο-άπειρο και διακριτό-συνεχές. Αυτά τα δύο δίπολα βασάνισαν και εξακολουθούν να βασανίζουν τους μαθηματικούς και τους φιλοσόφους των Μαθηματικών και ίσως συνδέονται, όπως θα δούμε, και με τα επιτεύγματα της λογικής που αφορούν τον διαχωρισμό των βασικών εννοιών της αλήθειας και της απόδειξης.

Αν ανατρέξουμε στην ιστορία θα διαπιστώσουμε ότι ο μεγάλος Λάιμπνιτς έχει μια πολύ συγκεκριμένη εικόνα και ιδέα του τι είναι αλήθεια και τι απόδειξη. Οι δύο έννοιες σχετίζονται με τρόπο ώστε το αληθές να είναι αποδείξιμο και το αποδείξιμο αληθές. Γι' αυτό όταν ο Λάιμπνιτς προσπαθεί να ταξινομήσει τις αληθείς προτάσεις στο πλαίσιο μιας γλώσσας, ουσιαστικά τις ταξινομεί σε δύο κατηγορίες: η πρώτη είναι η κατηγορία των αναλυτικών αληθών προτάσεων και η δεύτερη των ενδεχομενικών αληθών προτάσεων. Για να ορίσει αυτές τις δύο κατηγορίες θεωρεί κατ' αρχήν ότι οι αναλυτικές προτάσεις είναι οι προτάσεις που είναι αληθείς σε κάθε δυνατό κόσμο.

Στον Λάιμπνιτς υπάρχει μια θεωρία δυνατών κόσμων. Ο ορισμός αυτός είναι πολύ κοντά στον αντίστοιχο ορισμό που χρησιμοποιείται στη μαθηματική λογική, όπου οι λογικά έγκυροι τύποι είναι οι αληθείς, στη δομή κάθε γλώσσας στην οποία γράφεται η συγκεκριμένη μαθηματική θεωρία.

Περίπτωση ενδεχομενικής πρότασης είναι λόγου χάριν η πρόταση «ο αναπτήρας μου είναι κόκκινος». Το αληθές της είναι ενδεχομενικό, με την έννοια ότι εξαρτάται από την ιστορία του κόσμου στον οποίο ανήκουμε. Δηλαδή οι ενδεχομενικά αληθείς προτάσεις είναι προτάσεις οι οποίες είναι αληθείς σε κάποιους

κόσμους, ψευδείς σε κάποιους άλλους και, εν ολίγοις, η αλήθεια τους εξαρτάται από το πληροφοριακό περιεχόμενο του κόσμου στον οποίο αναφέρονται.

Έτσι, συμφύρονται οι έννοιες της απόδειξης και της αλήθειας στον Λάιμπνιτς, ο οποίος θεωρεί τις μαθηματικές αλήθειες αναλυτικές. Και αυτό γιατί καταφεύγει σε έναν δεύτερο τρόπο ορισμού σύμφωνα με τον οποίο, επειδή η απόδειξη είναι πεπερασμένη διαδικασία ως προς τον απαιτούμενο αριθμό των βημάτων, θεωρεί ότι –όπως στα Μαθηματικά– η πρόταση που αποδεικνύουμε στο τέλος αναλύεται, υπό μία έννοια, σε πεπερασμένα ως προς το πλήθος τους βήματα.

Θεωρεί ότι οι αναλυτικές προτάσεις είναι προτάσεις οι οποίες αναλύονται με πεπερασμένα ως προς το πλήθος τους βήματα σε πολύ απλές, αληθείς εκ των πραγμάτων προτάσεις. Άρα ουσιαστικά θεωρεί ότι υπ' αυτή την έννοια και οι αληθείς μαθηματικές προτάσεις θα είναι αναλυτικές προτάσεις, επειδή είναι αποδειξιμες με πεπερασμένα ως προς το πλήθος βήματα.

Στο σημείο αυτό εμπίπτει ο Καντ. Ο Καντ ουσιαστικά εισάγει τη διάκριση μεταξύ *a posteriori* και *a priori* αληθών προτάσεων ή κρίσεων. Και αντικαθιστά τον όρο «ενδοχωμενική» πρόταση με τον όρο «συνθετική» πρόταση. Έτσι, αν φτιάξουμε ένα στοιχειώδες διάγραμμα, θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν τέσσερις θέσεις στις οποίες ενδέχεται να υπάρχουν αληθείς προτάσεις.

Οι κατηγορίες αληθών προτάσεων που αντιστοιχούν στις τέσσερις αυτές θέσεις είναι: α) *a posteriori* συνθετικές αληθείς προτάσεις, β) *a posteriori* αναλυτικές αληθείς προτάσεις, γ) *a priori* συνθετικές αληθείς προτάσεις και δ) *a priori* αναλυτικές αληθείς προτάσεις. Οι αναλυτικές *a priori* αληθείς προτάσεις είναι αντίστοιχες με τις κατά Λάιμπνιτς αναλυτικές. Βεβαίως δεν υπάρχουν *a posteriori* αναλυτικές αληθείς προτάσεις. Δεν γίνεται οι «αναλυτικές» προτάσεις να είναι εκ των υστέρων αναγνωρίσιμες ως αληθείς γιατί είναι ανέκαθεν αληθείς. Οι *a posteriori* συνθετικές προτάσεις είναι αντίστοιχες με τις κατά Λάιμπνιτς ενδοχωμενικές. Υπολείπεται η τέταρτη εκδοχή, οι συνθετικές *a priori* αληθείς προτάσεις. Υπάρχουν συνθετικές *a priori* προτάσεις; Αν δεν υπάρχουν συνθετικές *a priori* προτάσεις, τότε η διάκριση *a priori*-*a posteriori* ουσιαστικά καταρρέει και είναι ίδια με τη γνωστή διάκριση αναλυτικότητας-ενδοχωμενικότητας.

Ο Καντ όμως ισχυρίζεται ότι τέτοιες προτάσεις υπάρχουν (για παράδειγμα οι αληθείς προτάσεις των Μαθηματικών, της Γεωμετρίας και της Αριθμητικής). Οι προτάσεις αυτές είναι συνθετικές διότι είναι αληθείς σε αυτόν τον συγκεκριμένο κόσμο. Εντούτοις, είναι δομικές προτάσεις για τον κόσμο αυτό. Αφορούν ακριβώς το πλαίσιο αναγνωρισιμότητας των εμπειρικών δεδομένων, δηλαδή η χωροχρονικότητα και οι αλήθειες της είναι αλήθειες των Μαθηματικών, διότι ο χώρος για τον Καντ είναι ευκλείδειος και ο χρόνος έχει ως προφανή μαθηματική έκφρασή του την Αριθμητική.

Βεβαίως, μετά ανακαλύπτονται οι μη ευκλείδειες Γεωμετρίες και η καντιανή εκδοχή παρουσιάζει προβλήματα. Βεβαίως μπορεί κανείς να φτιάξει ένα νεοκαντιανό σύστημα το οποίο να εντάξει μέσα σε όλη αυτή την ιστορία και να κλείσει το θέμα. Δημιουργούνται μετά απ' αυτό ζυμώσεις που κατά τον 19ο αιώνα οδηγούν σε προσπάθειες για τη δυνατότητα τυποποίησης των γλωσσών στις οποίες γράφονται τα Μαθηματικά. Ο Λάιμπνιτς ονειρευόταν τη δημιουργία μιας γλώσσας, της *characteristica universalis*, όπως την έλεγε, στο πλαίσιο της οποίας θα μπορούσαν να γραφούν τα πάντα. Το όνειρο αυτό παραμένει ανεκπλήρωτο μέχρι σήμερα.

Το ουσιώδες είναι ότι στον 19ο αιώνα σημειώνεται μια προσπάθεια να τυποποιηθούν κατ' αρχάς οι νόμοι της σκέψης, να ελεγχθούν, να μπουν σε κάποια πλαίσια ενώ συγχρόνως αναπτύσσονται διάφορες περιοχές των Μαθηματικών. Ο κ. Μπαλιός ανέφερε για παράδειγμα ότι στο πλαίσιο του 19ου αιώνα αναπτύσσονται ιδιαίτερα οι μη ευκλείδειες Γεωμετρίες, η Άλγεβρα και βέβαια λαμβάνει χώρα η αριθμητικοποίηση της ανάλυσης.

Προς το τέλος όμως αυτού του αιώνα ανακύπτει και πάλι το μεγάλο ερώτημα που βασάνιζε τον Αριστοτέλη, τον Πλάτωνα, τους μεσαιωνικούς, τον Καρτέσιο, τον Λάιμπνιτς, όλους τους διανοητές στην ιστορία του κόσμου: το πρόβλημα της ύπαρξης πραγματικού απείρου, πραγματικών άπειρων αντικειμένων.

Και βέβαια ο χώρος όπου παίρνει τεράστιες διαστάσεις αυτή η σύγκρουση είναι προφανώς αυτός των Μαθηματικών. Και βέβαια τότε είναι που μπαίνει στο παιχνίδι ο Καντόρ, ο οποίος ουσιαστικά εισάγει την έννοια του συνόλου, δηλαδή την έννοια της συλλογής ως νέου αντικειμένου. Θεωρεί ότι κάθε τέτοια συλλογή μπορεί να ορισθεί με μια ιδιότητα.

Εδώ ελλοχεύουν αντινομίες, γιατί αν χρησιμοποιήσουμε μια ιδιότητα γενική για να ορίσουμε ένα σύνολο, τότε ανοίγουμε το σύστημα σε παράδοξα, όπως το παράδοξο του Ράσελ, όπου αν χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα ότι το X δεν ανήκει στο X , αυτομάτως έχουμε πρόβλημα. Σχηματίζουμε το σύνολο A των X εκείνων όπου το X δεν ανήκει στο X . Ρωτάμε αν το A ανήκει στο A . Αν το A ανήκει στο A , έχοντας την ιδιότητα των στοιχείων του A , το A δεν ανήκει στο A , αν το A δεν ανήκει στο A έχοντας την ιδιότητα των στοιχείων του A , το A ανήκει στο A . Σωρεία παράδοξων αντιστοίχων με αυτό του Ράσελ εμφανίζονται στο τέλος του 19ου αιώνα και στις αρχές του 20ού. Κατά τις εκρηκτικές και «επαναστατικές» δηλαδή περιόδους και όχι τις κανονικές περιόδους, όταν πράγματι η Φιλοσοφία συναντιέται με τα Μαθηματικά και γενικότερα με όλες τις επιστήμες.

Η περιρρέουσα δηλαδή φιλοσοφική ατμόσφαιρα είναι αυτή η οποία τροφοδοτεί με ιδέες την κοινότητα η οποία πάσχει, η οποία θέλει σώνει και καλά να επιδιορθώσει το καταστρεμμένο και που στη θέση του παλιού θέλει να βάλει κάτι καινούριο διασώζοντας, ότι μπορεί από το παλιό. Σε αυτό το πλαίσιο διαμορφώνεται η μαθηματική λογική μαζί με τις σχολές της φιλοσοφίας των Μαθηματικών, τις οποίες ανέφερε ο κ. Μπαλτάς προηγουμένως στην εισήγησή του.

Τι γίνεται τώρα στο πλαίσιο αυτής της νέας μαθηματικής λογικής στον 20ό αιώνα; Τι γίνεται με αυτό που σας υποσχέθηκα από την αρχή, την περίφημη σχέση ανάμεσα στις έννοιες της αλήθειας και της απόδειξης; Στις αρχές του αιώνα, οι μαθηματικοί δεν καταλάβαιναν τη διαφορά ανάμεσα στην έννοια της αλήθειας και την έννοια της απόδειξης. Συνέχιζαν να παίζουν και με τη μια και με την άλλη, θεωρώντας τις σχεδόν ταυτόσημες.

Πίστευαν πως αν είχαν στον νου τους ένα σύμπαν μαθηματικών αντικειμένων, τους φυσικούς αριθμούς λόγου χάρη, ήταν δυνατό να διατυπώσουν κάποιες θεμελιώδεις ιδιότητες στο πλαίσιο μιας καλά τυποποιημένης γλώσσας. Ευελπιστούσαν ότι, διατυπώνοντας αυτές τις συγκεκριμένες ιδιότητες ή αξιώματα, θα μπορούσαν να συλλάβουν άπαξ διά παντός τις αληθείς προτάσεις στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών. Θεωρούσαν δηλαδή ότι είναι δυνατό να κατασκευάσουν ένα σύστημα αξιωμάτων, όπου οτιδήποτε είναι αποδείξιμο στο πλαίσιό του είναι αληθές και στο

πλαίσιο των φυσικών αριθμών και αντιστρόφως. Δηλαδή ό,τι είναι αληθές στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών είναι εξίσου αποδειξιμο στο πλαίσιο των αξιωμάτων. Μια τέτοια προσπάθεια οδήγησε στη δημιουργία των αξιωμάτων του Πεάνο για τους φυσικούς αριθμούς.

Η κρίση έρχεται, όμως, μετά από λίγα χρόνια κι αφότου διατυπώνεται η θεωρία των συνόλων με την εμφάνιση των συνολοθεωρητικών παραδόξων, η οποία οδηγεί σε φαινομενικό αδιέξοδο τους μαθηματικούς και τους φιλόσοφους της εποχής. Στη συνέχεια τα πράγματα δρομολογούνται, δηλαδή καταργείται η χρήση μιας ιδιότητας για την περιγραφή ενός συνόλου και περιορίζεται η χρήση της μόνο σε ήδη υπάρχοντα σύνολα. Τροποποιείται το πλαίσιο, δημιουργούνται τρεις βασικές σχολές Φιλοσοφίας των Μαθηματικών και κάποιες άλλες κατασκευαστικής υφής. Έτσι, φτάνουμε στη δεκαετία του '30, οπότε και εμφανίζεται ο Κουρτ Γκέντελ που ουσιαστικά αλλάζει την πορεία της εξέλιξης της Λογικής των Μαθηματικών, της Φιλοσοφίας των Μαθηματικών και της Φιλοσοφίας γενικότερα.

Όποιος θέλει να μιλήσει για τις έννοιες της αλήθειας και της απόδειξης σε επίπεδο θετικών επιστημών δεν είναι δυνατό να αγνοεί τα επιτεύγματα του Γκέντελ. Το πρώτο είναι το θεώρημα της πληρότητας, που εν συντομία υποστηρίζει ότι οι αποδεικτικές διαδικασίες είναι ισοδύναμες με τις επαληθευτικές. Ισχυρίζεται δηλαδή ότι μια πρόταση σε μια θεωρία είναι αποδειξιμη, αν και μόνο αν η συγκεκριμένη πρόταση είναι αληθής σε κάθε μοντέλο της συγκεκριμένης θεωρίας.

Βεβαίως, στο δεύτερο σκέλος αυτής της ισοδυναμίας υπάρχει ο ποσοδείκτης. Αντιλαμβάνεστε ότι είναι εξαιρετικά δύσκολο να υποκαταστήσει κανείς τη μηχανική έννοια της απόδειξης με την έννοια της επαληθευσιμότητας σε πρακτικό επίπεδο, γιατί αυτό θα ισοδυναμούσε με τον έλεγχο της αλήθειας της συγκεκριμένης πρότασης σε κάθε μοντέλο της συγκεκριμένης θεωρίας και τα μοντέλα αυτά είναι άπειρα.

Επομένως, η κατάληξη σε αυτό το αποτέλεσμα έχει ελάχιστη πρακτική σημασία. Επιπλέον, αυτό είναι αρκετό για να μας καταδείξει κάτι σύνθησε: όταν ο δάσκαλος προσπαθεί να αποδείξει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές γωνίες, χαράσσει στον πίνακα ένα τρίγωνο και μετά από μία κορυφή του τριγώνου γράφει μία παράλληλη προς τη βάση του ευθείας και, χρησι-

μποσιώντας τις παράλληλες ευθείες, αποδεικνύει πως το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες. Σε όλη του την αποδεικτική διαδικασία, ο καθηγητής δεν μετέλητε παρά επαληθευτικές διαδικασίες.

Γιατί; Ο πίνακας είναι ένα τυχαίο μοντέλο της ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το τρίγωνο που χαράσσει στον πίνακα είναι τυχαίο τρίγωνο στο πλαίσιο του τυχαίου μοντέλου της ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στην ουσία επαληθεύει ότι σε κάθε τρίγωνο ενός οποιουδήποτε μοντέλου της ευκλείδειας Γεωμετρίας ισχύει η πρόταση ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες.

Αυτό είναι το πρώτο σημαντικό συμπέρασμα· το δεύτερο και εντυπωσιακότερο είναι η μη πληρότητα. Εδώ ακριβώς θα φανεί καθαρά η διαφορά ανάμεσα στην έννοια της αλήθειας και της αποδειξιμότητας. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε μια θεωρία με αναγνωρίσιμες προτάσεις, με τις οποίες θεωρούμε ότι είναι δυνατό να περιλάβουμε όλες τις αληθείς προτάσεις στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών. Τι κάνει λοιπόν ο Γκέντελ; Εισηγείται ότι οποιαδήποτε σχετικά πολύπλοκη θεωρία, οποιαδήποτε θεωρία που εμπεριέχει δηλαδή ένα αρκετά σημαντικό τμήμα των αξιωμάτων της κατά Πεάνο Αριθμητικής, είναι θεμελιωδώς μη-πλήρης. Άρα υπάρχει τουλάχιστον μία πρόταση στη γλώσσα της θεωρίας που ούτε αυτή ούτε η άρνησή της μπορεί να αποδειχθεί από τα αξιώματα της θεωρίας.

Το σημαντικό είναι ότι είτε η θεωρία είτε η άρνησή της επαληθεύονται στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών. Αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό. Σημαίνει ότι αυτή η απλοϊκή αντίληψη είναι αβάσιμη: δεν είναι δυνατόν η έννοια της απόδειξης να χωρίσει το σύμπαν των προτάσεων που γράφονται στη γλώσσα της θεωρίας, σε καλές προτάσεις (δηλαδή αποδείξιμες από τα αξιώματα της θεωρίας) και κακές (αυτές των οποίων οι αρνήσεις είναι αποδείξιμες στο πλαίσιο της γλώσσας της θεωρίας).

Γνωρίζουμε πλέον ότι, από τον Γκέντελ και μετά, οι προτάσεις στο πλαίσιο της γλώσσας μιας σχετικά πολύπλοκης θεωρίας χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες: τις καλές, τις κακές και τις γκρίζες. Οι γκρίζες είναι εκείνες που και αυτές και οι αρνήσεις τους δεν μπορούν να αποδειχθούν από τη θεωρία. Σε αυτή τη φάση διατυπώνεται το εξής ερώτημα: Αν έχουμε τη θεωρία και μια πρόταση και γνωρίζουμε ότι ούτε αυτή ούτε η άρνησή της αποδεικνύονται από τη θεωρία, μπορούμε να την

κάνουμε αξίωμα, να την εντάξουμε στο σύστημα; Μήπως εντάσσοντάς την στο σύστημα, το καθιστούμε πλήρες; Αραγε εξαφανίζονται οι προτάσεις που ούτε αυτές ούτε οι αρνήσεις τους είναι αποδείξιμες από τη θεωρία; Η απάντηση είναι αρνητική.

Καμία αλγοριθμικά ή αναδρομικά ελέγξιμη επέκταση της θεωρίας δεν μπορεί να μας απαλλάξει από το πρόβλημα, γιατί είναι εγγενές και σχετίζεται με τις ρωγμές που υπήρχαν ανέκαθεν στο γνωσιολογικό μας σύστημα.